



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. G. Chentsov, A. M. Grigor'ev, Optimizing multi-inserts in routing problems with constraints, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, Volume 28, Issue 4, 513–530

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm180406>

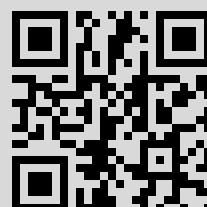
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 213.142.35.54

July 20, 2019, 10:55:21



УДК 519.6

© А. Г. Ченцов, А. М. Григорьев

## ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ МУЛЬТИВСТАВКИ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств) с условиями предшествования и функциями стоимости, зависящими от списка заданий. Постановка ориентирована на инженерные задачи, возникающие в атомной энергетике и связанные со снижением облучаемости работников, а также в машиностроении (маршрутизация движения инструмента при листовой резке на машинах с ЧПУ). Предполагается, что исследуемая задача дискретной оптимизации имеет ощутимую размерность, что вынуждает к использованию эвристик. Обсуждается процедура локального улучшения качества последних посредством применения оптимизирующих мультивставок, определяемых всякий раз в виде конечного дизъюнктного набора вставок. Предполагается, что в каждой вставке используется процедура оптимизации на основе широко понимаемого динамического программирования. Показано, что в «аддитивной» маршрутной задаче вышеупомянутого типа (с ограничениями и усложненными функциями стоимости) улучшения достигаемого результата также агрегируются аддитивно. Предлагаемая конструкция допускает реализацию в виде параллельной процедуры с использованием МВС; при этом отдельные вставки выделяются вычислительным узлам и формируются независимо.

*Ключевые слова:* динамическое программирование, мультивставки, параллельный алгоритм.

DOI: [10.20537/vm180406](https://doi.org/10.20537/vm180406)

### Введение

Настоящая работа продолжает [1–4], где рассматривались процедуры локального улучшения эвристик в задаче последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и усложненными функциями стоимости. Прототипом упомянутой задачи является известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК) или TSP (см. [5–11] и др.). Трудности вычислительной реализации, присущие ЗК, в упомянутой усложненной задаче только усугубляются. Все это делает актуальным исследование методов работы с эвристиками и возможностей улучшения результатов, доставляемых этими эвристиками. Такая возможность может, в частности, осуществляться посредством оптимизирующих вставок, при построении которых можно использовать широко понимаемое динамическое программирование (ДП). Однократное применение оптимизирующей вставки умеренной размерности приводит, как правило, лишь к незначительному улучшению достигаемого результата. Можно, однако (см. [1–3]), использовать итерационные процедуры с последовательным изменением локализации вставки. В настоящей работе предлагается другой прием: для улучшения качества эвристики планируется использовать сразу конечный набор оптимизирующих вставок, то есть мультивставку. Это приводит к более сильному преобразованию исходной эвристики. Вставки (точнее, элементарные вставки), составляющие мультивставку, могут обслуживаться, как показано в работе, различными вычислителями, что открывает возможность применения параллельных алгоритмов.

Отметим, что исследованию как самой ЗК, так и задач типа ЗК посвящено большое число работ в России и за рубежом (см., в частности, [5–12]). Вопросы, связанные с применением «маршрутного» ДП в задачах атомной энергетике, см. в монографии [13] и в большой серии предваряющих ее журнальных статей авторов. Задача управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ рассматривалась, в частности, в [14–21].

В связи с применением параллельных алгоритмов для решения задач маршрутизации с ограничениями отметим [22–25]. Однако схема распараллеливания, связанная с мультивставкой, существенно отличается от [22–25], где объектами построения были слои функции Беллмана. В настоящей работе распараллеливание связано с распределением вычислительных ресурсов по каналам, связанным каждый с «элементарной» вставкой, являющейся фрагментом мультивставки.

## § 1. Общие понятия и обозначения

Ниже используются кванторы, пропозициональные связки,  $\triangleq$  — равенство по определению,  $\emptyset$  — пустое множество;  $\text{def}$  заменяет фразу «по определению»; семейством называем множество, все элементы которого являются множествами. Если  $x$  — объект, то  $\{x\}$  есть  $\text{def}$  синглетон, содержащий  $x$  (то есть  $x \in \{x\}$ ). Для каждого множества  $S$  через  $\mathcal{P}(S)$  обозначаем семейство всех подмножеств (п/м)  $S$ , то есть булеан  $S$ ;  $\mathcal{P}'(S) \triangleq \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$  (семейство всех непустых п/м  $S$ ), а  $\text{Fin}(S)$  есть  $\text{def}$  семейство всех конечных множеств из  $\mathcal{P}'(S)$  (итак,  $\text{Fin}(S)$  — семейство всех непустых конечных п/м  $S$ ). Если  $S$  — непустое конечное множество, то  $\mathcal{P}'(S) = \text{Fin}(S)$ .

Если  $p$  и  $q$  — объекты, то  $\{p; q\}$  есть  $\text{def}$  единственное множество, содержащее  $p, q$  и не содержащее никаких других элементов;  $\{p; q\} = \{p\} \cup \{q\}$ . Если  $p = q$ , то в виде  $\{p; q\}$  получаем синглетон. Множества являются объектами, а потому для произвольных объектов  $a$  и  $b$  определяем, следуя [26, с. 67], упорядоченную пару (УП)  $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$  с первым элементом  $a$  и вторым элементом  $b$ . Если же  $z$  есть УП, то через  $\text{pr}_1(z)$  и  $\text{pr}_2(z)$  обозначаем соответственно первый и второй элементы этой УП  $z$ , однозначно определяемые условием  $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$ . Если  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — три объекта, то  $(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq ((\alpha, \beta), \gamma)$  (триплет, отвечающий  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ ). В этой связи напомним (см. [27, с. 17]), что для любых трех множеств  $A, B$  и  $C$  полагается  $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$  (нам понадобится случай непустых множеств), а потому при  $x \in A \times B$  и  $y \in C$  непременно

$$(x, y) = (\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x), y) \in A \times B \times C. \quad (1.1)$$

Если  $X$  и  $Y$  — непустые множества, то через  $Y^X$  обозначаем (непустое) множество всех отображений (функций) из  $X$  в  $Y$ , что соответствует [26]; если  $\mathbf{f} \in Y^X$  и  $Z \in \mathcal{P}(X)$ , то  $\mathbf{f}^1(Z) \triangleq \{\mathbf{f}(z) : z \in Z\} \in \mathcal{P}(Y)$  (при  $x \in X$  в виде  $\mathbf{f}(x) \in Y$  имеем значение  $\mathbf{f}$  в точке  $x$ ) есть образ  $Z$  при действии  $\mathbf{f}$ ; ясно, что  $(Z \neq \emptyset) \Rightarrow (\mathbf{f}^1(Z) \neq \emptyset)$ . Если  $A, B, C$  и  $D$  — непустые множества,  $\varphi \in D^{A \times B \times C}$ ,  $x \in A \times B$  и  $y \in C$ , то (см. (1.1)) определено  $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, x_2, y) \in D$ , где  $x_1 \triangleq \text{pr}_1(x)$  и  $x_2 \triangleq \text{pr}_2(x)$ .

Если  $P$  и  $Q$  — непустые множества, то через  $(\text{Bi})[P; Q]$  обозначаем множество всех биекций [28, с. 87] множества  $P$  на  $Q$ . Для любых непустых множеств  $S, T$  и биекции  $\psi \in (\text{Bi})[S; T]$  определена биекция  $\psi^{-1} \in (\text{Bi})[T; S]$ , для которой

$$(\psi(\psi^{-1}(t)) = t \quad \forall t \in T) \& (\psi^{-1}(\psi(s)) = s \quad \forall s \in S).$$

Перестановка непустого множества  $A$  определяется как биекция  $A$  на себя; итак,  $(\text{Bi})[A; A]$  есть множество всех перестановок  $A$ . Для произвольных непустых множеств  $P, Q$  и  $R$ , отображений  $g \in Q^P$  и  $h \in R^Q$  полагает, как обычно, что  $h \circ g \in R^P$  есть композиция  $g$  и  $h$  (итак,  $(h \circ g)(x) \triangleq h(g(x)) \quad \forall x \in X$ ); при  $g \in (\text{Bi})[P; Q]$  и  $h \in (\text{Bi})[Q; R]$  непременно  $h \circ g \in (\text{Bi})[P; R]$ .

Как обычно,  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая,  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  (натуральный ряд),  $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \dots\}$  и

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | (p \leq k) \& (k \leq q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0.$$

Непустому конечному множеству  $K$  сопоставляются его мощность  $|K| \in \mathbb{N}$  и непустое множество  $(\text{bi})[K] \triangleq (\text{Bi})[\overline{1, |K|}; K]$  всех биекций  $\overline{1, |K|}$  на  $K$ . Полагаем, как обычно,  $|\emptyset| \triangleq 0$ . Пусть

$\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leq \xi\}$  и для всякого непустого множества  $S$   $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$  есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на  $S$ .

## § 2. Основная задача маршрутизации

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество  $X$ , точку  $x_0 \in X$ , число  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{n} \geq 3$ , множества

$$\mathbf{L}_1 \in \text{Fin}(X), \dots, \mathbf{L}_n \in \text{Fin}(X), \quad (2.1)$$

а также (непустые) отношения

$$\mathbb{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1), \dots, \mathbb{L}_n \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_n \times \mathbf{L}_n). \quad (2.2)$$

Полагаем в дальнейшем, что выполнены следующие условия:

$$(\mathbf{x}_0 \notin \mathbf{L}_j \ \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, \mathbf{n}} \ \forall q \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{p\}).$$

Множества (2.1) именуем мегаполисами; с каждым из мегаполисов связываем варианты выполнения работ, именуемых внутренними. Рассматриваем процессы следующего вида:

$$\mathbf{x}_0 \rightarrow (x_{1,1} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{\mathbf{n},1} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})} \rightsquigarrow x_{\mathbf{n},2} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})}) \quad (2.3)$$

при ограничениях  $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{L}_{\alpha(1)}, \dots, (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{n},2}) \in \mathbb{L}_{\alpha(\mathbf{n})}$ . Здесь  $\alpha$  — перестановка в  $\overline{1, \mathbf{n}}$ , также удовлетворяющая ограничениям. Кортж  $(\alpha, (x_{1,1}, x_{1,2}), \dots, (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{n},2}))$  выбирается, как и в [1–4], с целью минимизации аддитивного критерия. Прямые стрелки в (2.3) отвечают внешним (по смыслу) перемещениям, а волнистые — выполнению внутренних работ;  $\mathbf{x}_0$  — база процесса, а отношения (2.2) определяют возможные варианты выполнения внутренних работ.

Пусть  $\mathbf{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$  (множество всех перестановок индексного множества  $\overline{1, \mathbf{n}}$ , именуемых (полными) маршрутами); итак, в (2.3)  $\alpha \in \mathbf{P}$ . Возможны, однако, ограничения и на выбор  $\alpha$ . Для целей их формализации введем множество  $\mathcal{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}})$ , элементами которого являются УП индексов, именуемые адресными. Тогда [3, (2.6)]

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\triangleq \{\alpha \in \mathbf{P} \mid \forall z \in \mathcal{K} \ \forall t_1 \in \overline{1, \mathbf{n}} \ \forall t_2 \in \overline{1, \mathbf{n}} \ ((\text{pr}_1(z) = \alpha(t_1)) \& (\text{pr}_2(z) = \alpha(t_2))) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (t_1 < t_2)\} = \{\alpha \in \mathbf{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \ \forall z \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

есть множество всех маршрутов (исходной задачи), допустимых по предшествованию, или, короче,  $\mathcal{K}$ -допустимых. Следуя [3, (2.7)], полагаем, что

$$\forall \mathcal{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathcal{K}) \ \exists z_0 \in \mathcal{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \ \forall z \in \mathcal{K}_0.$$

Тогда [29, часть 2]  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , то есть  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P})$ . Отметим, что

$$\mathfrak{X} \triangleq \{x_0\} \cup \left( \bigcup_{i=1}^n \mathbf{L}_i \right) \in \text{Fin}(X),$$

$\tilde{\mathfrak{Z}} \triangleq (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})^{\overline{0, \mathbf{n}}} \in \text{Fin}((X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}}})$ . Если  $\alpha \in \mathbf{P}$ , то в виде

$$\mathfrak{Z}_\alpha \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}} \mid (z_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)) \& (z_t \in \mathbb{L}_{\alpha(t)} \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}})\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathfrak{Z}}) \quad (2.4)$$

имеем множество всех трасс или траекторий, согласованных с маршрутом  $\alpha$ ; если  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ , то УП  $(\alpha, \mathbf{z})$  рассматриваем как допустимое решение (ДР) «большой» задачи. Тогда

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \times \tilde{\mathfrak{Z}} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha\} \in \text{Fin}(\mathcal{A} \times \tilde{\mathfrak{Z}}) \quad (2.5)$$

есть множество всех ДР исходной задачи. Каждое ДР имеет иерархическую структуру: выбор трассы подчинен выбору маршрута.

В части определения функций стоимости следуем [3, (2.12)]: при  $\mathbf{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$  полагаем заданными функции

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], \dots, c_N^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}]. \quad (2.6)$$

В терминах (2.6) определяется аддитивный критерий: если  $\alpha \in \mathbf{P}$  и  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ , то качество УП  $(\alpha, \mathbf{z})$  оцениваем значением

$$\hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] \triangleq \sum_{t=1}^n [\mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\alpha(t)}^\natural(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f^\natural(\text{pr}_2(\mathbf{z}(\mathbf{n}))).$$

Основная (аддитивная «большая») задача имеет следующий вид:

$$\hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] \rightarrow \min, \alpha \in \mathcal{A}, \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha. \quad (2.7)$$

Она характеризуется значением (экстремумом)

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \min_{\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha} \hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] = \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}} \hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (2.8)$$

и непустым множеством оптимальных решений. Однако в случае, когда задача (2.7) имеет достаточно большую размерность (прежде всего при большом значении  $\mathbf{n}$ ), нахождение  $V$  и ДР, доставляющих  $V$  (2.8), крайне затруднено, хотя общие принципы здесь известны (см., в частности, процедуры на основе широко понимаемого ДП [3, 30, 31]). В этой связи основное внимание в дальнейшем изложении уделяется вставкам и мультивставкам на основе ДП (см. [1–4]).

### § 3. Оптимизирующие вставки: общие свойства

Всюду в дальнейшем фиксируем  $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 1}$  в качестве «длины» возможной (однократной) вставки; в конкретных построениях полагается, конечно, что значение  $N$  является «умеренным»; последнее связано с возможностью применения ДП в пределах вставки. Локализация вставки определяется [1–4] значением  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ . Фиксируя  $\nu$ , мы заменяем фрагмент ДР «большой» задачи локально оптимальным. В настоящем разделе ограничимся конструированием однократных вставок, как и в [1–4]. В этой связи совсем кратко напомним построения [1–4], несколько изменяя обозначения, с тем чтобы в дальнейшем применять данные построения уже для исследования мультивставок.

Итак, при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  полагаем, что  $\Lambda_\nu[\alpha] \triangleq (\alpha(\nu + s))_{s \in \overline{1, N}}$ , получая инъективное отображение  $\overline{1, N}$  в  $\overline{1, \mathbf{n}}$ , а также конечное множество — образ («окно» на маршруте  $\alpha$ )

$$\Gamma_\nu[\alpha] \triangleq \Lambda_\nu[\alpha]^1(\overline{1, N}) \in \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}}), \quad (3.1)$$

для которого, конечно,  $\Lambda_\nu[\alpha] \in (\text{bi})[\Gamma_\nu[\alpha]]$ . С (3.1) связываем «окно» условий предшествования: при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  множество

$$Q_\nu[\alpha] \triangleq \{z \in \mathcal{K} | (\text{pr}_1(z) \in \Gamma_\nu[\alpha]) \& (\text{pr}_2(z) \in \Gamma_\nu[\alpha])\} \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \quad (3.2)$$

индексных УП «большой» задачи порождает локализацию (адресных пар)

$$\mathbf{K}_\nu[\alpha] \triangleq \{(\Lambda_\nu[\alpha]^{-1}(\text{pr}_1(z)), \Lambda_\nu[\alpha]^{-1}(\text{pr}_2(z))) : z \in Q_\nu[\alpha]\} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}) \quad (3.3)$$

(случай  $\mathbf{K}_\nu[\alpha] = \emptyset$  не исключается) со свойством [3, с. 127]

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_\nu[\alpha]) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}_0. \quad (3.4)$$

Полагая далее  $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ , из (3.4) извлекаем [29, часть 2] свойство

$$\mathbf{A}_\nu[\alpha] \triangleq \{\beta \in \mathbb{P} \mid \beta^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\text{pr}_2(z)) \ \forall z \in \mathbf{K}_\nu[\alpha]\} \neq \emptyset, \quad (3.5)$$

определяющее существование  $\mathbf{K}_\nu[\alpha]$  — допустимых маршрутов вставки; итак, (3.5) — множество всех допустимых маршрутов вставки.

**Вклеивание локального маршрута.** Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $\beta \in \mathbb{P}$ , то  $(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu] \in \mathbf{P}$  [3, (3.9)] определяется условиями

$$\begin{aligned} ((\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](t) &\triangleq \alpha(t) \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& ((\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](t) \triangleq \\ &\triangleq (\Lambda_\nu[\alpha] \circ \beta)(t - \nu) \ \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вклеивание (3.6) сохраняет [3, предложение 3.3] допустимость по предшествованию:

$$(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu] \in \mathcal{A} \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \ \forall \beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]. \quad (3.7)$$

Пусть  $\mathbf{e} \in \mathbb{P}$  — тождественная перестановка  $\overline{1, N} : \mathbf{e}(s) \triangleq s \ \forall s \in \overline{1, N}$ . Ясно, что  $\mathbf{e}$  при вклеивании по схеме (3.6) не изменяет [3, (3.10)] исходный маршрут:

$$(\mathbf{e} - \text{sew})[\alpha; \nu] = \alpha \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (3.8)$$

Свойство (3.8) дополняется очевидной допустимостью  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{e} \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (3.9)$$

Приступая к определению локальных трасс, отметим естественную редукцию  $\mathfrak{X}$  § 2:  $\forall \alpha \in \mathcal{A} \ \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \ \forall s \in \overline{1, N}$

$$(M_s[\alpha; \nu] \triangleq \mathbf{L}_{\Lambda_\nu[\alpha](s)}) \& (\mathbb{M}_s[\alpha; \nu] \triangleq \mathbb{L}_{\Lambda_\nu[\alpha](s)}). \quad (3.10)$$

Вышеупомянутая редукция сводится при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  к замене  $\mathfrak{X}$  множеством

$$\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq \{\text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu))\} \cup \left( \bigcup_{s=1}^N M_s[\alpha; \nu] \right) \in \text{Fin}(\mathfrak{X}),$$

где  $\text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu))$  играет роль локальной базы; полагаем также

$$\mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq (\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu])^{\overline{0, N}}.$$

Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $\beta \in \mathbb{P}$ , то множество локальных трасс, согласованных с маршрутом  $\beta$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu] &\triangleq \{h \in \mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \mid (h(0) = (\text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu)), \text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu)))) \& (h(t) \in \\ &\in \mathbb{M}_{\beta(t)}[\alpha; \nu] \ \forall t \in \overline{1, N})\} \in \text{Fin}(\mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение каждой локальной задачи является, по сути, иерархическим: выбор трассы подчинен выбору маршрута. При  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  в виде

$$\tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq \{(\beta, h) \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \times \mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \mid h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]\} \in \text{Fin}(\mathbf{A}_\nu[\alpha] \times \mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]) \quad (3.12)$$

имеем множество всех ДР соответствующей локальной задачи.

Всюду в дальнейшем  $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ . С каждым триплетом  $(\alpha; \mathbf{z}; \nu) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$  связываем конкретный набор функций стоимости:

$$\begin{aligned} c[\alpha; \mathbf{z}; \nu] &\in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathfrak{N}], \\ c_1[\alpha; \mathbf{z}; \nu] &\in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathfrak{N}], \dots, \\ c_N[\alpha; \mathbf{z}; \nu] &\in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathfrak{N}], \quad f[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Упомянутые функции определяем отдельно для случаев  $\nu < \mathbf{n} - N$  и  $\nu = \mathbf{n} - N$ . Итак, если  $(\alpha; \mathbf{z}; \nu) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - (N + 1)}$ , то полагаем, что при  $h \in \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$  и  $K \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} (c[\alpha; \mathbf{z}; \nu](h, K) &\triangleq c^\sharp(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K) \cup \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}))) \& (c_j[\alpha; \mathbf{z}; \nu](h, K) \triangleq \\ &\triangleq c_{\Lambda_\nu[\alpha](j)}^\sharp(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K) \cup \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})) \quad \forall j \in \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (3.14)$$

кроме того, при  $x \in \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$  полагаем, что

$$f[\alpha; \mathbf{z}; \nu](x) \triangleq c^\sharp(x, \text{pr}_1(\mathbf{z}(\nu + N + 1)), \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})). \quad (3.15)$$

Итак, посредством (3.14) и (3.15) конкретизированы функции (3.13) в случае  $\nu < \mathbf{n} - N$ .

Если  $(\alpha, \mathbf{z}, \nu) \in \mathbf{D} \times \{\mathbf{n} - N\}$ , то полагаем при  $h \in \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$  и  $K \in \mathfrak{N}$ , что

$$\begin{aligned} (c[\alpha; \mathbf{z}; \nu](h, K) &\triangleq c^\sharp(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K))) \& (c_j[\alpha; \mathbf{z}; \nu](h, K) \triangleq \\ &\triangleq c_{\Lambda_\nu[\alpha](j)}^\sharp(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K)) \quad \forall j \in \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (3.16)$$

кроме того, полагаем, что при  $x \in \mathbb{X}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$

$$f[\alpha; \mathbf{z}; \nu](x) \triangleq f^\sharp(x). \quad (3.17)$$

Посредством (3.16), (3.17) конкретизированы функции (3.13) для случая  $\nu = \mathbf{n} - N$ ; в данном случае имеется особенность в определении этих функций, отмеченная в (3.16), (3.17).

Сейчас, располагая во всех возможных случаях функциями (3.13), введем аддитивные критерии для соответствующих локальных задач: при  $(\alpha; \mathbf{z}; \nu) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$ ,  $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$  полагаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu] &\triangleq \sum_{s=1}^N [c[\alpha; \mathbf{z}; \nu](\text{pr}_2(h(s-1)), \text{pr}_1(h(s)), \beta^1(\overline{s, N})) + \\ &+ c_{\beta(s)}[\alpha; \mathbf{z}; \nu](h(s), \beta^1(\overline{s, N}))] + f[\alpha; \mathbf{z}; \nu](\text{pr}_2(h(N))). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Теперь каждому триплету  $(\alpha, \mathbf{z}, \nu) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$  сопоставляем локальную задачу

$$\mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu] \rightarrow \min, (\beta, h) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]. \quad (3.19)$$

С каждой задачей (3.19) связываем значение (экстремум) и непустое множество оптимальных решений: если  $(\alpha, \mathbf{z}, \nu) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то

$$\mathbb{V}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq \min_{(\beta, h) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]} \mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.20)$$

и при этом

$$(\text{SOL})[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq \{(\beta_0, h_0) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] | \mathfrak{B}_{\beta_0}[h_0|\alpha; \mathbf{z}; \nu] = \mathbb{V}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]). \quad (3.21)$$

Решение каждой локальной задачи связываем с определением (3.20) и какого-либо элемента множества (3.21). В этой связи отметим процедуры [4, §§ 3–6].

**Вклеивание локальных трасс.** Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $h \in \mathbb{Z}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$ , то полагаем, что  $(\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu] \in \tilde{\mathfrak{Z}}$  определяется условиями

$$\begin{aligned} ((\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu](t) &\triangleq h(t - \nu) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N} \& ((\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu](t) \triangleq \\ &\triangleq \mathbf{z}(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

В частности, (3.22) применимо в случае, когда  $\beta \in \mathbb{P}$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$ .

**Предложение 1.** Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ ,  $\beta \in \mathbb{P}$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$ , то

$$(\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu] \in \mathfrak{Z}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu]}. \quad (3.23)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Фиксируем  $\alpha, \mathbf{z}, \nu, \beta$  и  $h$  в соответствии с условиями; полагаем для краткости, что  $\mathbf{y} \triangleq (\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu]$ . В силу (3.10), (3.11) и (3.22) при  $t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}$

$$\mathbf{y}(t) = h(t - \nu) \in \mathbb{M}_{\beta(t - \nu)}[\alpha; \nu],$$

где  $\mathbb{M}_{\beta(t - \nu)} = \mathbb{L}_{(\Lambda_\nu[\alpha] \circ \beta)(t - \nu)}$  и согласно (3.6)  $(\Lambda_\nu[\alpha] \circ \beta)(t - \nu) = (\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](t)$ , то есть

$$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{L}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](t)}. \quad (3.24)$$

Если же  $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}$ , то согласно (2.4) и (3.22)  $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{z}(\tau) \in \mathbb{L}_{\alpha(\tau)}$ , где согласно (3.6)  $\alpha(\tau) = (\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](\tau)$ , а потому

$$\mathbf{y}(\tau) \in \mathbb{L}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](\tau)}. \quad (3.25)$$

Поскольку выбор  $t$  и  $\tau$  был произвольным, установлено (см. (3.22), (3.24), (3.25)), что

$$\mathbf{y}(s) \in \mathbb{L}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu](s)} \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (3.26)$$

Наконец, из (2.4) и (3.22) получаем цепочку равенств  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}(0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ . Используя (2.4), (3.7) и (3.26), получаем, что  $\mathbf{y} \in \mathfrak{Z}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu]}$ . С учетом определения  $\mathbf{y}$  получаем (3.23).

Из (3.7) и предложения 1 вытекает (см. (2.5), (3.7)), что

$$((\beta - \text{sew})[\alpha; \nu], (\text{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu]) \in \mathbf{D} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall (\beta, h) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu]. \quad (3.27)$$

Посредством (3.27) определена процедура вклеивания локального ДР в глобальное (в обоих случаях ДР определяется в виде пары «маршрут–трасса»). В частности (см. (3.21)), таким образом определено вклеивание локально оптимальных ДР в глобальные.

При  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  имеем [4, §§ 4, 5] трассу

$$(\text{nar})[\mathbf{z}|\alpha; \nu] \in \mathcal{Z}_e[\alpha; \mathbf{z}; \nu], \quad (3.28)$$

для которой

$$((\text{nar})[\mathbf{z}|\alpha; \nu](0) \triangleq (\text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu)), \text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu))) \& ((\text{nar})[\mathbf{z}|\alpha; \nu](t) \triangleq \mathbf{z}(t + \nu) \quad \forall t \in \overline{1, N}). \quad (3.29)$$

Трасса (3.28), (3.29) является, по сути дела, сужением  $\mathbf{z}$  на  $\overline{\nu, \nu + N}$  с естественным сдвигом, отвечающим перемещению данного сужения во вставку. Из (3.9), (3.12) и (3.28) имеем, что

$$(\mathbf{e}, (\text{nar})[\mathbf{z}|\alpha; \nu]) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; \mathbf{z}; \nu].$$

Поэтому при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$

$$\varkappa[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \triangleq \mathfrak{B}_e[(\text{nar})[\mathbf{z}|\alpha; \nu]|\alpha; \mathbf{z}; \nu] - \mathbb{V}[\alpha; \mathbf{z}; \nu] \in \mathbb{R}_+. \quad (3.30)$$



С учетом (3.28), (3.29) получаем, что (3.30) определяет потенциальные возможности улучшения фрагмента исходного ДР за счет применения однократной оптимизирующей вставки. При этом

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{G}}_{(\beta_0-\text{sew})[\alpha;\nu]}[(\text{sew})[h_0|\alpha;\mathbf{z};\nu]] &= \hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] - \varkappa[\alpha;\mathbf{z};\nu] \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha \\ &\quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall (\beta_0, h_0) \in (\text{SOL})[\alpha;\mathbf{z};\nu]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Как следствие, получаем, что

$$V \leq \hat{\mathfrak{G}}_\alpha[\mathbf{z}] - \varkappa[\alpha;\mathbf{z};\nu] \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (3.32)$$

Нашей целью является, в частности, распространение (3.32) на случай, когда используется несколько оптимизирующих вставок. Поскольку рассматривается задача, осложненная ограничениями и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий, потребуется дополнительное исследование конструкций, связанных со вставками, чему и посвящается следующий параграф.

#### § 4. Некоторые общие свойства вставок

Настоящий параграф является вспомогательным. Мы рассматриваем здесь вопросы, связанные со склеиванием маршрутов и трасс, и ограничиваемся случаем однократных вставок.

**Предложение 2.** Если  $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha_2 \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то

$$(\alpha_1(t) = \alpha_2(t) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}) \Rightarrow (\mathbf{A}_\nu[\alpha_1] = \mathbf{A}_\nu[\alpha_2]). \quad (4.1)$$

**Доказательство.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\nu$  удовлетворяют условиям предложения, включая условие истинности посылки доказываемой импликации (4.1). Тогда

$$\Lambda_\nu[\alpha_1] = \Lambda_\nu[\alpha_2], \quad (4.2)$$

а потому  $\Gamma_\nu[\alpha_1] = \Gamma_\nu[\alpha_2]$  в силу (3.1) и, как следствие (см. (3.2)),  $Q_\nu[\alpha_1] = Q_\nu[\alpha_2]$ . С учетом (3.3) и (4.2) получаем равенство  $\mathbf{K}_\nu[\alpha_1] = \mathbf{K}_\nu[\alpha_2]$ , а тогда из (3.5) следует требуемое равенство  $\mathbf{A}_\nu[\alpha_1] = \mathbf{A}_\nu[\alpha_2]$ . Истинность импликации (4.1) установлена.

Весьма очевидно (см. (3.29)) следующее свойство: если  $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_1 \in \mathfrak{Z}_{\alpha_1}$ ,  $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_2 \in \mathfrak{Z}_{\alpha_2}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то

$$(\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \overline{\nu, \nu + N}) \Rightarrow ((\text{nar})[\mathbf{z}_1|\alpha_1;\nu] = (\text{nar})[\mathbf{z}_2|\alpha_2;\nu]). \quad (4.3)$$

**Предложение 3.** Если  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_1 \in \mathfrak{Z}_\varphi$ ,  $\psi \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_2 \in \mathfrak{Z}_\psi$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - (N + 1)}$ , то  $((\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& (\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \overline{\nu, \nu + N}) \& (\text{pr}_1(\mathbf{z}_1(\nu + N + 1)) = \text{pr}_1(\mathbf{z}_2(\nu + N + 1))) \& (\varphi^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}) = \psi^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}))) \Rightarrow (\mathbb{V}[\varphi;\mathbf{z}_1;\nu] = \mathbb{V}[\psi;\mathbf{z}_2;\nu])$ .

**Доказательство** легко следует из определений (см. (3.11), (3.14), (3.15), (3.18), а также предложение 2). С учетом (3.16), (3.17) устанавливается

**Предложение 4.** Если  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_1 \in \mathfrak{Z}_\varphi$ ,  $\psi \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{z}_2 \in \mathfrak{Z}_\psi$  и  $\nu = \mathbf{n} - N$ , то  $((\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& (\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \overline{\nu, \nu + N})) \Rightarrow (\mathbb{V}[\varphi;\mathbf{z}_1;\nu] = \mathbb{V}[\psi;\mathbf{z}_2;\nu])$ .

Из (3.14), (3.15), (3.30), (4.3) и предложения 3 вытекает, что  $\forall \varphi \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z}_1 \in \mathfrak{Z}_\varphi \quad \forall \psi \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z}_2 \in \mathfrak{Z}_\psi \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - (N + 1)}$

$$\begin{aligned} ((\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& (\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \overline{\nu, \nu + N}) \& (\text{pr}_1(\mathbf{z}_1(\nu + N + 1)) = \\ = \text{pr}_1(\mathbf{z}_2(\nu + N + 1))) \& (\varphi^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}) = \psi^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}))) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varkappa[\varphi;\mathbf{z}_1;\nu] = \varkappa[\psi;\mathbf{z}_2;\nu]). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (3.16), (3.17), (3.30), (4.3) и предложения 4 следует, что  $\forall \varphi \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z}_1 \in \mathfrak{Z}_\varphi \quad \forall \psi \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{z}_2 \in \mathfrak{Z}_\psi$

$$\begin{aligned} ((\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in \overline{\mathbf{n} - N + 1, \mathbf{n}}) \& (\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \overline{\mathbf{n} - N, \mathbf{n}})) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varkappa[\varphi;\mathbf{z}_1;\mathbf{n} - N] = \varkappa[\psi;\mathbf{z}_2;\mathbf{n} - N]). \end{aligned} \quad (4.5)$$

### § 5. Оптимизирующие мультивставки

Рассмотрим конструкцию, направленную на улучшение эвристик посредством применения мультивставки, компонентами которой являются оптимизирующие вставки в смысле [1–4]. Данная конструкция ориентирована на применение параллельных алгоритмов с реализацией на МВС и многоядерных ПЭВМ.

Всюду в дальнейшем фиксируем ДР исходной «большой» задачи:

$$(\lambda, \mathbf{h}) \in \mathbf{D}; \quad (5.1)$$

тогда  $\lambda \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{h} \in \mathfrak{Z}_\lambda$ . Кроме того, фиксируем  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , и кортеж индексов

$$(\nu_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow \overline{0, \mathbf{n}}. \quad (5.2)$$

Полагаем, что  $\nu_m \leq \mathbf{n} - N$ , а индексы в (5.2) упорядочены и, более того,

$$\nu_j + N < \nu_{j+1} \quad \forall j \in \overline{1, m-1}; \quad (5.3)$$

дизъюнктные «промежутки»  $\overline{\nu_1 + 1, \nu_1 + N}, \dots, \overline{\nu_m + 1, \nu_m + N}$  отвечают применению однократных вставок; совокупность последних рассматривается в качестве мультивставки. Заметим, что из (5.3) вытекает очевидная цепочка неравенств

$$0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_m \leq \mathbf{n} - N.$$

При этом, конечно,  $\nu_j \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall j \in \overline{1, m}$ . Поэтому мы можем использовать построения предыдущих разделов применительно к каждой отдельно взятой вставке, определяемой для ДР (5.1). С учетом этого полагаем, что

$$((\rho_j, u_j))_{j \in \overline{1, m}} \in \prod_{j=1}^m (\text{SOL})[\lambda; \mathbf{h}; \nu_j], \quad (5.4)$$

то есть  $(\rho_1, u_1) \in (\text{SOL})[\lambda; \mathbf{h}; \nu_1], \dots, (\rho_m, u_m) \in (\text{SOL})[\lambda; \mathbf{h}; \nu_m]$ . Конкретное построение данных УП — оптимальных решений локальных задач — может быть реализовано по схеме [4, § 3]. Впрочем, для некоторых наших целей достаточным будет лишь сам факт существования кортежа (5.4) (см. в этой связи алгоритм 1<sup>0</sup> работы [4]). При этом

$$(\rho_j, u_j) \in \widetilde{\mathbf{D}}[\lambda; \mathbf{h}; \nu_j] \quad \forall j \in \overline{1, m}.$$

Следовательно (см. (3.12), (5.4)), при  $j \in \overline{1, m}$  имеем  $\rho_j \in \mathbf{A}_{\nu_j}[\lambda]$  и  $u_j \in \mathcal{Z}_{\rho_j}[\lambda; \mathbf{h}; \nu_j]$ , причем

$$\mathfrak{B}_{\rho_j}[u_j | \lambda; \mathbf{h}; \nu_j] = \mathbb{V}[\lambda; \mathbf{h}; \nu_j].$$

В терминах кортежа (5.4) конструируем далее два специальных «протяженных» кортежа. Итак, пусть  $\eta : \overline{1, \mathbf{n}} \rightarrow \overline{1, \mathbf{n}}$  определяется условиями

$$\begin{aligned} \left( \eta(t) \triangleq \lambda(t) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^m \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right) \right) \& (\eta(t) \triangleq (\Lambda_{\nu_s}[\lambda] \circ \rho_s)(t - \nu_s) \\ & \forall s \in \overline{1, m} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

По аналогии с (5.5) введем при  $k \in \overline{1, m}$  кортеж  $\eta_k : \overline{1, \mathbf{n}} \rightarrow \overline{1, \mathbf{n}}$  по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \left( \eta_k(t) \triangleq \lambda(t) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right) \right) \& (\eta_k(t) \triangleq (\Lambda_{\nu_s}[\lambda] \circ \rho_s)(t - \nu_s) \\ & \forall s \in \overline{1, k} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Посредством (5.6) определены кортежи  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , причем (см. (3.6), (5.5), (5.6))

$$(\eta_1 = (\rho - \text{sew})[\lambda; \nu_1]) \& (\eta_m = \eta). \quad (5.7)$$

**Предложение 5.** Каждый из кортежей, определяемых в (5.6), является  $\mathfrak{K}$ -допустимым маршрутом в исходной задаче:  $\eta_k \in \mathcal{A} \quad \forall k \in \overline{1, m}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\Omega \triangleq \{k \in \overline{1, m} | \eta_k \in \mathcal{A}\}$ . Тогда  $1 \in \Omega$  в силу (3.7) и (5.7). Покажем, что  $\Omega = \overline{1, m}$ . Допустим противное:  $\Omega \neq \overline{1, m}$ , а тогда  $\overline{1, m} \setminus \Omega \neq \emptyset$  и

$$\theta \triangleq \inf(\overline{1, m} \setminus \Omega) \in \overline{1, m} \setminus \Omega;$$

в частности,  $\theta \neq 1$ , а потому  $\theta \in \overline{2, m}$  и  $\theta - 1 \in \overline{1, m-1}$ , причем  $\eta_{\theta-1} \in \mathcal{A}$  по определению  $\Omega$ . Легко видеть, (см. (5.6)), что  $\rho_\theta \in \mathbf{A}_{\nu_\theta}[\eta_{\theta-1}]$  и

$$\eta_\theta = (\rho_\theta - \text{sew})[\eta_{\theta-1}; \nu_\theta],$$

а потому согласно (3.7)  $\eta_\theta \in \mathcal{A}$  вопреки предположению.

**Следствие 1.** Если  $k \in \overline{1, m-1}$ , то  $\eta_{k+1} = (\rho_{k+1} - \text{sew})[\eta_k; \nu_{k+1}]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** сводится к достаточно понятной комбинации (5.6) и предложения 5. С учетом (5.7), предложения 5 и следствия 1 получаем, что

$$\eta = (\rho_m - \text{sew})[\eta_{m-1}; \nu_m] \in \mathcal{A}.$$

Итак, посредством (5.5) определяется  $\mathfrak{K}$ -допустимый (допустимый по предшествованию) маршрут «большой» задачи.

Отметим, что при  $j \in \overline{1, m}$  имеем, в частности, что  $u_j : \overline{0, N} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ . С учетом этого полагаем, что  $w : \overline{0, n} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  есть такая функция, что

$$\begin{aligned} (w(t) \triangleq \mathbf{h}(t) \quad \forall t \in \overline{0, n} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^m \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right)) \& (w(t) = u_s(t - \nu_s) \\ \forall s \in \overline{1, m} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned}$$

Кроме того, введем вспомогательную систему отображений  $w_1, \dots, w_m$ . Итак, если  $p \in \overline{1, m}$ , то

$$w_p : \overline{0, n} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$$

определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} (w_p(t) \triangleq \mathbf{h}(t) \quad \forall t \in \overline{0, n} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^p \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right)) \& (w_p(t) \triangleq \\ \triangleq u_s(t - \nu_s) \quad \forall s \in \overline{1, p} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Легко видеть, что (см. (3.22)) справедливы свойства

$$(w_1 = (\text{sew})[u_1 | \lambda; \mathbf{h}; \nu_1]) \& (w = w_m). \quad (5.9)$$

Как следствие, имеем с учетом (5.7) и (5.9), что (см. предложение 1)

$$\eta_1 \in \mathcal{A} : w_1 \in \mathfrak{Z}_{\eta_1}; \quad (5.10)$$

тогда  $(\eta_1, w_1) \in \mathbf{D}$ .

**Предложение 6.** Если  $k \in \overline{1, m}$ , то  $w_k \in \mathfrak{Z}_{\eta_k}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Полагаем, что  $\Omega \triangleq \{k \in \overline{1, m} | w_k \in \mathfrak{Z}_{\eta_k}\}$ . Тогда в силу (5.10)  $1 \in \Omega$ , а потому  $\Omega \neq \emptyset$ . Покажем, что  $\Omega = \overline{1, m}$ . Допустим противное:  $\Omega \neq \overline{1, m}$ . Тогда  $\overline{1, m} \setminus \Omega \neq \emptyset$ , и при этом

$$\theta \triangleq \inf(\overline{1, m} \setminus \Omega) \in \overline{1, m} \setminus \Omega,$$

в то время как  $\theta - 1 \in \Omega$ . Тогда, по определению  $\Omega$ ,

$$\eta_{\theta-1} \in \mathcal{A} : w_{\theta-1} \in \mathfrak{Z}_{\eta_{\theta-1}}; \quad (5.11)$$

поскольку  $\rho_\theta \in \mathbb{P}$ , определено  $(\rho_\theta - \text{sew})[\eta_{\theta-1}; \nu_\theta] \in \mathbf{P}$  (см. §3), и при этом согласно следствию 1

$$\eta_\theta = (\rho_\theta - \text{sew})[\eta_{\theta-1}; \nu_\theta] \in \mathcal{A}.$$

С учетом (5.6) и (5.11) нетрудно показать, что  $w_\theta(t) \in \mathbb{L}_{\eta_\theta(t)} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Кроме того, с учетом (5.8) получаем равенство  $w_\theta(0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ . Согласно (2.4)  $w_\theta \in \mathfrak{Z}_{\eta_\theta}$  и, как следствие,  $\theta \in \Omega$ , что невозможно. Требуемое противоречие получено.

Мы установили, что  $(\eta_k, w_k) \in \mathbf{D} \quad \forall k \in \overline{1, m}$ . Вместе с тем с учетом (5.4), (5.6) и предложений 2, 6 получаем, что

$$(\rho_{k+1}, u_{k+1}) \in (\text{SOL})[\eta_k; w_k; \nu_{k+1}] \quad \forall k \in \overline{1, m-1} \quad (5.12)$$

((5.12) следует из определений; при этом, однако, следует отдельно рассматривать при  $k \in \overline{1, m-1}$  случаи  $\nu_{k+1} < \mathbf{n} - N$  и  $\nu_{k+1} = \mathbf{n} - N$ ). Отметим теперь, что в силу предложения 1, следствия 1 и (5.12)

$$(\text{sew})[u_{k+1}|\eta_k; w_k; \nu_{k+1}] \in \mathfrak{Z}_{\eta_{k+1}} \quad \forall k \in \overline{1, m-1}.$$

При этом (см. (3.21), (3.30), (5.12)) определены значения  $\mathcal{K}[\eta_k; w_k; \nu_{k+1}] \in \mathbb{R}_+$  при  $k \in \overline{1, m-1}$ .

**Предложение 7.** Если  $k \in \overline{1, m-1}$ , то справедливо равенство

$$w_{k+1} = (\text{sew})[u_{k+1}|\eta_k; w_k; \nu_{k+1}].$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Фиксируем  $k \in \overline{1, m-1}$  и полагаем для краткости  $\tilde{w}_k \triangleq (\text{sew})[u_{k+1}|\eta_k; w_k; \nu_{k+1}]$ ;  $\tilde{w}_k \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ . Тогда (см. (3.22))

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_k(t) = u_{k+1}(t - \nu_{k+1}) \quad \forall t \in \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}) \& (\tilde{w}_k(t) = \\ &= w_k(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

С другой стороны, в силу (5.8)  $w_{k+1} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$  таково, что

$$\begin{aligned} \left( w_{k+1}(t) = \mathbf{h}(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right) \right) \& (w_{k+1}(t) = \\ &= u_s(t - \nu_s) \quad \forall s \in \overline{1, k+1} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Наконец,  $w_k \in \tilde{\mathfrak{Z}}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( w_k(t) = \mathbf{h}(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right) \right) \& (w_k(t) = \\ &= u_s(t - \nu_s) \quad \forall s \in \overline{1, k} \quad \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из (5.14) и (5.15) получаем, в частности, что

$$w_{k+1}(t) = \mathbf{h}(t) = w_k(t) \quad \forall t \in (\overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}) \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N} \right). \quad (5.16)$$

С другой стороны, из (5.14) и (5.15) следует, что

$$w_{k+1}(t) = w_k(t) \quad \forall t \in \bigcup_{j=1}^k \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N}. \quad (5.17)$$

Поэтому (см. (5.16), (5.17)) имеем следующее свойство:

$$w_{k+1}(t) = w_k(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}. \quad (5.18)$$

Из (5.13), (5.18) получаем теперь, что

$$\tilde{w}_k(t) = w_{k+1}(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}. \quad (5.19)$$

Вместе с тем согласно (5.13)–(5.15)

$$\tilde{w}_k(t) = u_{k+1}(t - \nu_{k+1}) = w_{k+1}(t) \quad \forall t \in \overline{\nu_{k+1} + 1, \nu_{k+1} + N}. \quad (5.20)$$

Из (5.19) и (5.20) получаем требуемое равенство  $\tilde{w}_k = w_{k+1}$ .

Из предложения 6 получаем после простых преобразований (см. (3.31)), что

$$\hat{\mathfrak{G}}_{\eta_{k+1}}[w_{k+1}] = \hat{\mathfrak{G}}_{\eta_k}[w_k] - \varkappa[\eta_k; w_k; \nu_{k+1}] \quad \forall k \in \overline{1, m-1}. \quad (5.21)$$

В то же время с учетом (5.7) и (5.9)

$$\mathfrak{G}_{\eta_1}[w_1] = \mathfrak{G}_\lambda[\mathbf{h}] - \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_1]. \quad (5.22)$$

**Предложение 8.** Если  $k \in \overline{1, m-1}$ , то  $\varkappa[\eta_k; w_k; \nu_{k+1}] = \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_{k+1}]$ .

Доказательство сводится к применению (4.4), (4.5). Теперь уже из (5.21) получаем, что  $\hat{\mathfrak{G}}_{\eta_{k+1}}[w_{k+1}] = \hat{\mathfrak{G}}_{\eta_k}[w_k] - \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_{k+1}] \quad \forall k \in \overline{1, m-1}$ . Учитывая (5.7), (5.9) и (5.22), получаем следующее положение.

**Теорема 1.** Справедливо равенство  $\hat{\mathfrak{G}}_\eta[w] = \hat{\mathfrak{G}}_\lambda[\mathbf{h}] - \sum_{i=1}^m \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_i]$ .

Из теоремы 1 вытекает очевидная оценка

$$V \leq \hat{\mathfrak{G}}_\lambda[\mathbf{h}] - \sum_{i=1}^m \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_i], \quad (5.23)$$

подобная по смыслу (3.32). Для получения оценки (5.23) достаточно найти (см. (3.30)) значения

$$\mathbb{V}[\lambda; \mathbf{h}; \nu_1] \in \mathbb{R}_+, \dots, \mathbb{V}[\lambda; \mathbf{h}; \nu_m] \in \mathbb{R}_+;$$

для определения этих значений (экстремумов локальных задач) можно использовать алгоритм 1° [4], что приводит к некоторой экономии ресурсов памяти соответствующего вычислителя. Такой подход может быть, в частности, использован в интересах оптимизации кортежа (5.2), что полезно на этапе поиска локализации мультивставки. На этапе построения склеенного ДР большой задачи, то есть УП  $(\eta, w)$ , в каждой из «элементарных» вставок, составляющих мультивставку, следует уже использовать алгоритм 2° работы [4] для поиска кортежа (5.4). При этом обслуживание «элементарных» вставок может осуществляться независимо работающими процессорами (узлами).

## § 6. Вычислительный эксперимент

В данном параграфе описывается практическая реализация решения маршрутной задачи, осложненной условиями предшествования и функциями стоимости, зависящими от списка невыполненных заданий. Рассматривается задача демонтажа системы излучающих элементов (см. [33]). Для решения упомянутой задачи реализована схема на основе вышеупомянутой конструкции с использованием мультивставки (см. § 5). Данный метод позволяет решать маршрутные задачи существенной размерности.

Далее приведен алгоритм решения задачи (2.7) с использованием мультивставки.

1. На начальном этапе выполняется считывание исходных данных, таких как:

- координаты городов мегаполисов и точки старта,
- координаты излучающих элементов,
- мощность излучающих элементов,
- скорость перемещения работника,
- условия предшествования (адресные пары).

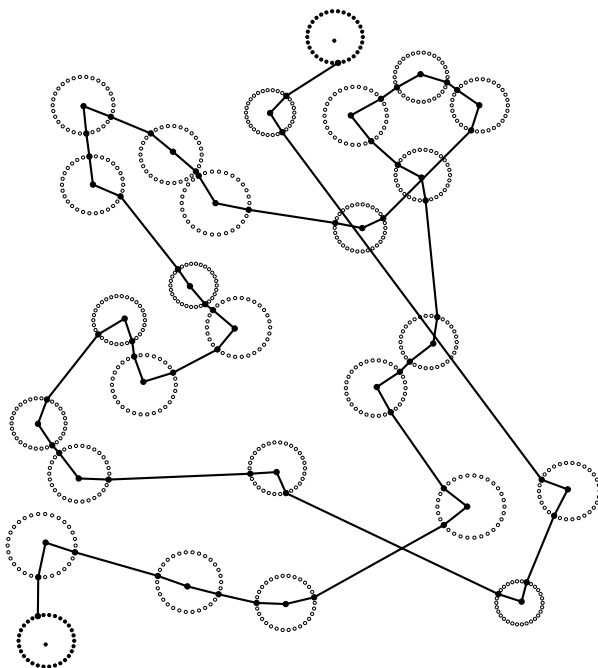
Затем выполняется расчет функций стоимости (2.6) по формулам, приведенным в [33]. Так как процесс вычисления этих функций является достаточно трудоемким при большом количестве мегаполисов, то для ускорения вычислений используется параллельный алгоритм на базе библиотеки OpenMP с общей памятью.

2. На данном этапе выполняется построение эвристического решения при помощи алгоритма [32, § 6], который учитывает ограничения в виде условий предшествования и функции стоимости, зависящие от списка невыполненных заданий.
3. Далее выполняем улучшение найденного на предыдущем этапе маршрута при помощи мультивставки. Для этого разбиваем найденный маршрут на фрагменты по 25 мегаполисов, при этом оставляя между фрагментами «перемычку» — один мегаполис. Каждый такой фрагмент передаем при помощи протокола MPI отдельному вычислительному узлу. Затем каждый вычислительный узел по отдельности выполняет построение оптимального маршрута выделенного ему фрагмента. В качестве инструмента для вычисления оптимального маршрута используется ДП. Для ускорения вычислений используется параллельный алгоритм с общей памятью на базе библиотеки OpenMP. Так как изначально переданные фрагменты маршрута были просчитаны приближенно, после вычислений происходит улучшение результатов.
4. После того как каждый вычислительный узел обработал свой фрагмент первоначального решения, он передает получившийся результат на главную управляющую машину, где происходит склеивание улучшенных фрагментов в одно большое решение, которое не является, вообще говоря, оптимальным, но является «более близким» к таковому за счет оптимизирующих фрагментов, из которых оно состоит.

Рассмотрим модельный пример решения задачи маршрутизации процесса демонтажа радиоактивного оборудования на плоскости (см. [33]). Пусть мегаполисы, имитирующие возможные входы/выходы помещений с источниками излучения, получены дискретизацией окружностей: на каждой окружности на равном угловом расстоянии, начиная с точки с 0-й угловой координатой, располагаются 30 точек. Каждому мегаполису соответствует точечный объект, имитирующий источник излучения в помещении. Пусть стартовая точка (она же база процесса демонтажа) совпадает с началом координат, т. е.  $x^0 = (0, 0)$ . Полагаем, что скорость движения исполнителя, выполняющего демонтаж, вне помещений в 4 раза больше, чем внутри, что призвано моделировать сложность перемещения внутри каждого мегаполиса, обусловленную наличием тех или иных конструкций и механизмов, мешающих быстрому перемещению внутри помещения.

Далее приведен результат расчета одного модельного эксперимента на супервычислителе «УРАН». Для модельного примера использовался вариант с 255 мегаполисами и 45 адресными парами, соответствующими условиям предшествования, размер фрагмента вставки — 25 мегаполисов. Были получены следующие результаты:

- 1) суммарная величина дозы облучения, полученная при помощи эвристического алгоритма, составила 3.61487.
- 2) суммарная величина дозы облучения, полученная после применения мультивставок составила 2.96104.



**Рис. 1.** Графическая иллюстрация одной элементарной вставки (до улучшения)

3) степень улучшения результата составила 18 %.

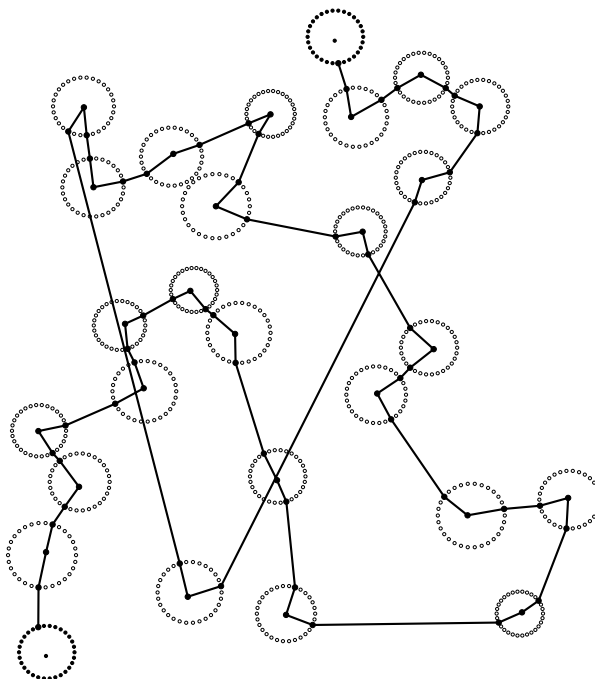
4) время вычислений составило 22 мин 35 с.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 14-11-00109).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 454–475.
2. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Локальные вставки на основе динамического программирования в задаче маршрутизации с ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 56–75. DOI: [10.20537/vm140204](https://doi.org/10.20537/vm140204)
3. Ченцов А.Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 122–141. DOI: [10.20537/vm140410](https://doi.org/10.20537/vm140410)
4. Ченцов А.Г. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 565–578. DOI: [10.20537/vm160410](https://doi.org/10.20537/vm160410)
5. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. I. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
6. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. II. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
7. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. III. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
8. Gutin G., Punnen A.P. The traveling salesman problem and its variations. Springer, 2002. 850 p.
9. Cook W.J. In pursuit of the traveling salesman: Mathematics at the limits of computation. Princeton University Press, NJ, 2012.
10. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
11. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.





**Рис. 2.** Графическая иллюстрация действия одной элементарной вставки (после улучшения)

12. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
13. Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения эффективности и безопасности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012.
14. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
15. Фроловский В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2005. № 4. С. 63–66.
16. Ганелина Н.Д., Фроловский В.Д. Исследование методов построения кратчайшего пути обхода отрезков на плоскости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9. № 3. С. 241–252. <http://mi.mathnet.ru/sjvm116>
17. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
18. Верхотуров М. А., Тарасенко П.Ю. Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. Т. 10. № 2 (27). С. 123–130.
19. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization // International Journal of Production Research. 2005. Vol. 43. Issue 11. P. 2195–2216. DOI: [10.1080/00207540500070376](https://doi.org/10.1080/00207540500070376)
20. Lee M.K., Kwon K.B. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // International Journal of Production Research. 2006. Vol. 44. Issue 24. P. 5307–5326. DOI: [10.1080/00207540600579615](https://doi.org/10.1080/00207540600579615)
21. Ye J., Chen Z.G. An optimized algorithm of numerical cutting path control in garment manufacturing // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 796. P. 454–457. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454)
22. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 134–149.



23. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. Вып. 12. С. 53–76.
24. Ченцов А.Г., Кошелева М.С. Динамическое программирование в задаче курьера со стоимостями, зависящими от списка заданий // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 4. С. 232–244. DOI: [10.17587/mau.16.232-244](https://doi.org/10.17587/mau.16.232-244)
25. Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: схема независимых вычислений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 12. С. 834–846. DOI: [10.17587/mau.17.834-846](https://doi.org/10.17587/mau.17.834-846)
26. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
27. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир. 1964. 430 с.
28. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.
29. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 240 с.
30. Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
31. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158. DOI: [10.7868/S0869565215320043](https://doi.org/10.7868/S0869565215320043)
32. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 183–201.
33. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 83–109. DOI: [10.20537/2226-3594-2017-50-08](https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08)

Поступила в редакцию 17.09.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: [chentsov@imm.uran.ru](mailto:chentsov@imm.uran.ru)

Григорьев Алексей Михайлович, заведующий отделом, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: [ag@uran.ru](mailto:ag@uran.ru)

*A. G. Chentsov, A. M. Grigor'ev*

#### Optimizing multi-inserts in routing problems with constraints

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. [513–530](#) (in Russian).

**Keywords:** dynamic programming, multi-inserts, parallel algorithm.

MSC2010: 49L20, 90C39

DOI: [10.20537/vm180406](https://doi.org/10.20537/vm180406)

We consider a problem of sequential traversal of megalopolises (nonempty finite sets) with travel cost functions depending on the set of pending tasks and precedence constraints. Its formulation is aimed at engineering problems in fission power generation connected with minimizing the exposure of staff to radiation and in machine engineering (routing of a CNC sheet cutting machine's tool). This discrete optimization problem is assumed to be sufficiently large-scale to necessitate the use of heuristics. We consider a procedure of local improvement for heuristics through a successive application of optimizing multi-inserts—finite disjoint sets of inserts. Each insert is assumed to be optimized by means of a broadly understood dynamic programming

procedure. We show that in an “additive” routing problem of this kind (with precedence constraints and complex travel cost functions) the result’s improvements are also aggregated additively. The proposed construction admits a parallel implementation for multiprocessor systems; in this case, the inserts are distributed to computational nodes and formed in an independent way.

**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14–11–00109).

## REFERENCES

1. Chentsov A.A., Chentsov A.G. The problem of megalopolises consistent detouring, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2014, vol. 19, issue 2, pp. 454–475 (in Russian).
2. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Local dynamic programming incuts in routing problems with restrictions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 2, pp. 56–75 (in Russian). DOI: [10.20537/vm140204](https://doi.org/10.20537/vm140204)
3. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 4, pp. 122–141 (in Russian). DOI: [10.20537/vm140410](https://doi.org/10.20537/vm140410)
4. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in route problems with constraints and complicated cost functions. II, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 565–578 (in Russian). DOI: [10.20537/vm160410](https://doi.org/10.20537/vm160410)
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
6. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman’s problem. II: Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
7. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
8. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer US, 2007. DOI: [10.1007/b101971](https://doi.org/10.1007/b101971)
9. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman: Mathematics at the limits of computation*, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
10. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. DOI: [10.1145/321105.321111](https://doi.org/10.1145/321105.321111)
11. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. DOI: [10.1137/0110015](https://doi.org/10.1137/0110015)
12. Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, issue 6, pp. 972–989. DOI: [10.1287/opre.11.6.972](https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972)
13. Korobkin V.V., Seseikin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye Tekhnologii, 2012.
14. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatcionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
15. Frolovskii V.D. Computer-aided design of the control programs for thermal metal cutting on NPC machines, *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, no. 4, pp. 63–66 (in Russian).
16. Ganelina N.D., Frolovskii V.D. On constructing the shortest circuits on a set of line segments, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 241–252 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/sjvm116>
17. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. On routing tool motion on the sheet cutting NPC machines, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
18. Verkhoturov M.A., Tarasenko P.Yu. The software for the problem of the cutting instrument route optimization based on chain cutting when a flat figure is cut, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatcionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2008, vol. 10, no. 2 (27), pp. 123–130 (in Russian).
19. Wang G.G., Xie S.Q. Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization, *International Journal of Production Research*, 2005, vol. 43, issue 11, pp. 2195–2216. DOI: [10.1080/00207540500070376](https://doi.org/10.1080/00207540500070376)

20. Lee M.K., Kwon K.B. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm, *International Journal of Production Research*, 2006, vol. 44, issue 24, pp. 5307–5326. DOI: [10.1080/00207540600579615](https://doi.org/10.1080/00207540600579615)
21. Ye J., Chen Z.G. An optimized algorithm of numerical cutting path control in garment manufacturing, *Advanced Materials Research*, 2013, vol. 796, pp. 454–457. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454)
22. Chentsov A.G. On a parallel procedure for constructing the Bellman function in the generalized problem of courier with internal jobs, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 3, pp. 532–546. DOI: [10.1134/S0005117912030113](https://doi.org/10.1134/S0005117912030113)
23. Chentsov A.G. A parallel procedure of constructing Bellman function in the generalized courier problem with interior works, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programirovanie*, 2012, issue 12, pp. 53–76 (in Russian).
24. Chentsov A.G., Kosheleva M.S. Dynamic programming in the precedence constrained TSP with the costs depending on a list of tasks, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 232–244 (in Russian). DOI: [10.17587/mau.16.232-244](https://doi.org/10.17587/mau.16.232-244)
25. Chentsov A.G., Grigoryev A.M. Dynamic programming method in a routing problem: a scheme of independent computations, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 12, pp. 834–846 (in Russian). DOI: [10.17587/mau.17.834-846](https://doi.org/10.17587/mau.17.834-846)
26. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
27. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.
28. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to algorithms* (1st ed.), MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1999, 960 p.
29. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
30. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 4, pp. 728–744. DOI: [10.1134/S0005117914040122](https://doi.org/10.1134/S0005117914040122)
31. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, issue 3, pp. 685–688. DOI: [10.1134/S1064562415060083](https://doi.org/10.1134/S1064562415060083)
32. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extremal routing problem with internal losses, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 87–106. DOI: [10.1134/S0081543809050071](https://doi.org/10.1134/S0081543809050071)
33. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A model variant of the problem about radiation sources utilization (iterations based on optimization insertions), *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 83–109 (in Russian). DOI: [10.20537/2226-3594-2017-50-08](https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08)

Received 17.09.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [chentsov@imm.uran.ru](mailto:chentsov@imm.uran.ru)

Grigoryev Alexey Mikhailovich, Head of Department, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

E-mail: [ag@uran.ru](mailto:ag@uran.ru)